Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

4. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Vektorräume, Logik, Rekursion, Arbeiten mit Axiomen

Aufgabe 1. ((Alleine 2P +2P))

(a) Es seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir definieren auf dem direkten Produkt $V \times W$ die Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch

$$(v, w) \oplus (\tilde{v}, \tilde{w}) := (v + \tilde{v}, w + \tilde{w}), \quad \lambda \odot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

mit $v, \tilde{v} \in V,\ w, \tilde{w} \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit $\oplus, \odot$ und einem geeignet gewählten Nullvektor ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und geben Sie den Nullvektor an.

(b) Es sei M eine nicht-leere Menge, V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\operatorname{Abb}(M, V)$ die Menge aller Abbildungen von M nach V. Wie in Beispiel 2.2 der Vorlesung betrachten wir die Addition $\oplus$ und skalare Multiplikation $\odot$ auf $\operatorname{Abb}(M, V)$ definiert durch

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \odot f)(x) := \lambda f(x)$$

mit $f, g \in \operatorname{Abb}(M, V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in M$.
Zeigen Sie, dass $\operatorname{Abb}(M, V)$ mit $\oplus, \odot$ und einem geeignet gewählten Nullvektor ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und geben Sie den Nullvektor an.

Aufgabe 2. ((Alleine) 1P+1P+1P+1P)

Zeigen Sie: Ist $(V, +, \cdot, 0_V)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so gilt:

(i) Für alle $v, w \in V$ existiert genau ein $x \in V$, sodass $v + x = w$ gilt. Insbesondere gilt, dass 0_V eindeutig ist.

(ii) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(iii) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt: $\lambda \cdot (-v) = (-\lambda) \cdot v$. Insbesondere gilt $-v = (-1) \cdot v$ für alle $v \in V$. Hierbei ist $-v$ das Additive Inverse von v in der Definition von Vektorraum.

(iv) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt: $\lambda \cdot (v - w) = \lambda \cdot v - \lambda \cdot w$. Wir verwenden die Notation $v - w = v + (-w)$.

Hinweis: Geben Sie in jedem Beweisschritt an, welche Axiome aus Definition 2.1 Sie verwendet haben.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 04. 12. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Erinnerung:

- Eine Variante des Auswahlaxiom **AA** besagt:

  AA: Zu einer nicht-leeren Menge M existiert eine Auswahlfunktion $h\colon \mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\} \to M$ mit $h(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\}$.

- Seien X, Y zwei Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Man nennt $g\colon Y \to X$ ein *Rechtsinverses* zu f, falls $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gilt.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 2P+2P)

In dieser Aufgabe betrachten wir ein weiteres Axiom, das Axiom **AER**:

AER: Zu jeder surjektiven Abbildung existiert ein Rechtsinverses.

Wir wollen zeigen, dass das Axiom **AER** das Auswahlaxiom **AA** impliziert.

(a) Es sei eine nicht-leere Menge M gegeben. Wir definieren

$$\mathcal{M} = \{(x, A) \in M \times \mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\} \mid x \in A\}$$

und betrachten auf $\mathcal{M}$ die Relation „$\sim$“ definiert durch: $(x, A) \sim (y, B) :\Leftrightarrow A = B$. Zeigen Sie, dass „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ ist. Geben Sie außerdem eine bijektive Abbildung $h\colon \mathcal{M}_\sim \to \mathcal{P}(M)\backslash\{\emptyset\}$ an und zeigen Sie die Bijektivität.

(b) Zeigen Sie nun, dass **AER** das Auswahlaxiom **AA** impliziert.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 2P+2P)

(a) Die Fibonacci-Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wird durch das folgende Bildungsgesetz rekursiv definiert:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(i) = f(i-1) + f(i-2) \text{ für } i \geq 3.$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion folgende Aussagen:

(i) Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $f(2i+1) = f(i)^2 + f(i+1)^2$.

(ii) Für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq 2$ gilt: $f(2i) = f(i)(f(i+1) + f(i-1))$.

(b) Wir formulieren das folgende Axiom:

DC: Ist X eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ eine Relation, sodass für alle $x \in X$ ein $y \in X$ existiert mit $(x, y) \in \mathfrak{R}$, dann existiert eine Abbildung $f\colon \mathbb{N}_0 \to X$ mit $f(n)\mathfrak{R}f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom **AA** das Axiom **DC** impliziert.

Nett zu wissen für Analysis II: *Das Axiom **DC** ist ausreichend, um in metrischen Räumen die Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit zu zeigen. Außerdem ist es äquivalent zum Satz von **Baire** für vollständige metrische Räume.*

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 04. 12. 2020 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.